

14.10.

Jaké ze zvařených fce
sestavovat fce nové?

- aritmetickými operacemi $+$, $-$, $\cdot$, $:$;
- skládáním fce

$$h(x) = f(g(x))$$

$g(x) \dots$ vnitřní fce
 $f(y) \dots$ vnější fce

dosařujeme hodnotu $y = g(x)$
do fce $f(y)$ a dostáváme tak

ložnou fci $h(x)$

Př: $h(x) = \ln(x^2 - 4)$

vnitřní fce: $g(x) = x^2 - 4$ dosaďme
vnější fce: $f(y) = \ln y$ $y = x^2 - 4$

$D_h = ?$ musí být $x^2 - 4 > 0$

(kval. def. oboru logaritmu $= \mathbb{R}_+$)

$$\Rightarrow D_h = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

Spojitost fce

"Def.": fce f je spojitá, pokud

malá změna proměnné x

způsobí jen malou změnu hodnoty $f(x)$



f spojitá na (a, b)

f nespojita

graf = nepřerušovaná čára

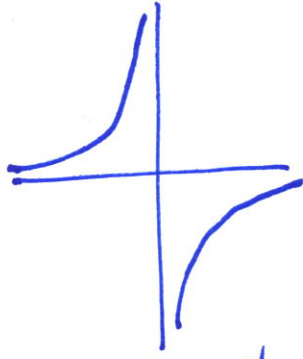
$C =$ bod

nespojivost

Provas: všechny fce,
které pocházejí, budou
spojité v každém intervalu
obrazěném v D_f

! Spojitost lze vždy vztáhnout
pouze k intervalu (ne ke
~~společně~~ sjednocení intervalů)?

$$P_r: f(x) = \frac{1}{x}$$



$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+$
Lze říci, že $\frac{1}{x}$ je spojitá v $\mathbb{R}_-$
a také je spojitá v $\mathbb{R}_+$.
Ale nelze říci, že by $\frac{1}{x}$ byla
spojitá v celém D_f !
(D_f není interval.)

Limity fce

Def: mecht' $x_0 \in \mathbb{R}$ nebo $x_0 = \pm\infty$,
mecht' $a \in \mathbb{R}$ nebo $a = \pm\infty$.

Říkáme, že fce f má v bodě x_0
limitu a , pokud platí:

"když se x blíží libovolně
blíže k x_0 , pak $f(x)$ se blíží
libovolně blízko k a ".

Píšeme: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$

nebo $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} a$.

Pozn: 1) U posloupnosti je pouze
"n $\rightarrow \infty$ ", u fce je "x $\rightarrow x_0$ ",
kde x je celok: z $\mathbb{R}, +\infty, -\infty$

2) Do jedné definice jsme sloučili případy, kdy limita $a \in \mathbb{R}$ i $a = \pm\infty$, přičemž " $f(x)$ se blíží lib. blíže $k + \infty$ " znamená " $f(x)$ roste nade všechnu meze".

3) limity nemusejí existovat.

příklad existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ a je rovná číslu $a \in \mathbb{R}$, říkáme, že $f(x)$ konverguje k číslu a pro $x \rightarrow x_0$.

4) pro danou $f(x)$ a daný bod x_0 existuje nejvýše jedna limita

5) nevynecháme symbol " $x \rightarrow x_0$ " pod symbolem limity

Jednostranné limity

(= limity zprava / zleva)

vvažujeme bod $x_0 \in \mathbb{R}$, definujeme

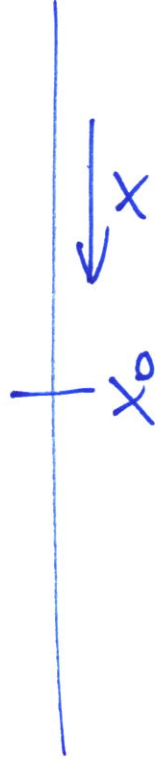
limity $f(x)$ v bodě x_0 zprava:

značíme ji $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a$,

znamena to, že v definici limity

vvažujeme pouze $x > x_0$

(tj. blížíme se k číslu x_0 zprava)



Podobné limity fleva:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a, \text{ bereme pouze } x < x_0$$

$$\frac{\quad}{x} \rightarrow x_0$$

Přirodné def. limitu pak nazýváme
oboustrannou limitou a platí:

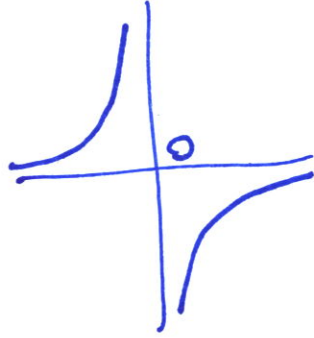
Pro f a v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ existuje

obě jednostr. limity a rovnají se

$\Leftrightarrow$ existuje oboustranná limita

a x_0 je rovna této hodnotě.

Př: $f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = 0$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

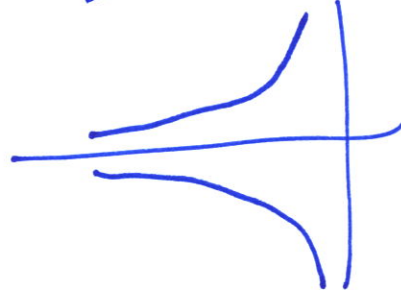
Existují obě jednostr. limity,
ale nerovná se $\Rightarrow$ neexistuje
oboustranná $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$.

Př: $f(x) = \frac{1}{x^2}, x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$\Rightarrow$ existuje

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$



Věty pro výpočet limit fce

① Věta o limitě $+_1 -_1$: fce

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

Toto platí, pokud všechny limity existují a operace správně je definována.

Toto platí pro jakékoli $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, a také pro jednostranné limity.

② Věta o limitě složené fce

$$h(x) = f(g(x))$$

$\uparrow$ $\nwarrow$
 složená vnější vnitřní

Nechť f a g jsou spojitě (pro nás platí vždy) a předp.,
 že platí:

$$g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} a$$

$$f(y) \xrightarrow{y \rightarrow a} b$$

Pak platí

$$h(x) = f(g(x)) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} b.$$

Postup: chc. mať $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$;

späť najprv $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$,

toto nálezene číslo a dosadíme

do: $\lim_{y \rightarrow a} f(y) = b$; toto

číslo b je hľadané $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = b$.

$$\underline{\text{Príklad}}: h(x) = \sqrt{\frac{4x+1}{x+1}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = ?$$

najprv spočítame limitu vnútorné fce:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x+1}{x+1} = 4 = a,$$

$$\text{pak spočítame } \lim_{y \rightarrow 4} \sqrt{y} = \sqrt{4} = 2 = b$$

↑
(ovládame)

$$(\text{nevieme} \text{ fca } f(g) = \sqrt{g})$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 2$$

Rozdelenie počítaní limit
fce podľa polohy bodu x_0
voči D_f :

1) $x_0 \in D_f$

2) $x_0 \notin D_f$, ale je hraničným
bodom D_f (t.j. x_0 je
koncovým bodom niektorého
otevoreného intervalu z D_f)

3) $x_0 \notin D_f$ ani není
hraničným bodom D_f

V prípade 3) nemá
počítanú limitu vôbec
smysl.

Případ 1) : $x_0 \in D_f$ - plati

jednoduché pravidlo:

je-li f je f spojitá (pro vs vědy),

$$\text{pak } \boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)}$$

cíli limita je rovna fční hodnotě.

Tedy stačí dosadit x_0 do f .

$$\underline{\text{Př:}} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+2} = ?$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-2\}, \quad x_0 = 1 \in D_f$$

f je $\frac{1}{x+2}$ je spojitá v $(-\infty, -2)$ a v $(-2, \infty)$

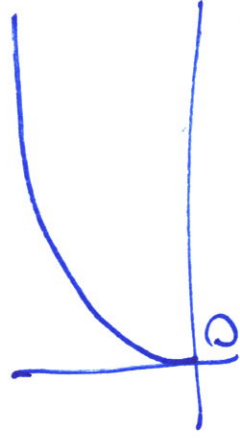
$\Rightarrow$ dosadíme $x_0 = 1$ do f :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{1+2} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

Stejně to funguje i pro jednostranné limity v koncových bodech intervali.

$$\underline{\text{Př:}} \quad f(x) = \sqrt{x}, \quad D_f = \langle 0, +\infty \rangle$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{x} = ?$$



Náme $0 \in D_f$, $\sqrt{x}$ je v 0 spojitá zprava, takže stačí opět jen dosadit:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{x} = \sqrt{0} = \underline{\underline{0}}.$$

Zbývá náš případ 2):

$x_0 \notin D_f$, ale x_0 je krajním bodem D_f

Máme 2 podpřípady:

2a) $x_0 = \pm\infty$

2b) $x_0 \in \mathbb{R}$

2a) $x_0 = \pm\infty$, je kraj. bodem D_f :

Postupujeme stejně jako u limit posloupností, dáváme přitom pozor na znaménka

Př (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+3}{x^2+1} \stackrel{F.1}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+3}{x^2+1} =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3(1+\frac{3}{x^3})}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} \stackrel{\rightarrow 0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = +\infty$$

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3+3}{x^2+1} = \dots = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = -\infty$

stejný postup jako (1)

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+4}{x+2} \stackrel{F.1}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \cdot 3(1+\frac{4}{x^2})}{x(1+\frac{2}{x})} \stackrel{\rightarrow 0}{=}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \frac{1}{1} = +\infty$$

(4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3+4}{x+2} = \dots = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \cdot \frac{1}{1} = +\infty$

(5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} \stackrel{F.1}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{x(1+\frac{1}{x})} =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x \cdot (1+\frac{1}{x})} \stackrel{\rightarrow 0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}} = 1$$

$\sqrt{x^2} = x$
pro $x > 0$

$\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \rightarrow 1$ (o lim. složené fee)

$$6) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = \dots = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} \cdot \frac{1}{1} = \underline{\underline{-1}}$$

$x < 0$ (protože $x \rightarrow -\infty$!)

$$\Rightarrow \sqrt{x^2} = -x \quad \nabla \nabla \nabla !$$